CHAPTER 2

Rectas perpendiculares.

1. Ángulos rectos, agudos y obtusos.

Un ángulo de 90° (congruente por lo tanto con la mitad de un ángulo llano o con una cuarta parte del ángulo completo) se llama un **ángulo recto**. Un ángulo más chico que el recto se llama **agudo** y uno más grande que el recto, pero más chico que el llano se llama **obtuso** (Figura 1).

Todos lo ángulos rectos son, por supuesto, congruentes, ya que contienen el mismo número de grados.

La medida de un ángulo recto se denota a veces como d (la inicial de la palabra francesa *droit* que significa "recto").

2. Ángulos suplementarios.

Dos ángulos (AOB y BOC, Figura 3) se llaman **suplementarios** si tienen un lado en común y sus dos lados restantes forman la continuación uno del otro. Como la suma de estos ángulos es un ángulo llano, *la suma de dos ángulos suplementarios es 180°* (en otras palabras, es congruente a la suma de dos ángulos rectos).

Para cada ángulo se pueden construir dos ángulos suplementarios. Por ejemplo, para el ángulo AOB (Figura 3), al prolongar el lado AO obtenemos un ángulo suplementario BOC y al prolongar el lado BO obtenemos otro ángulo suplementario AOD. *Dos ángulos suplementarios al mismo ángulo son congruentes*,

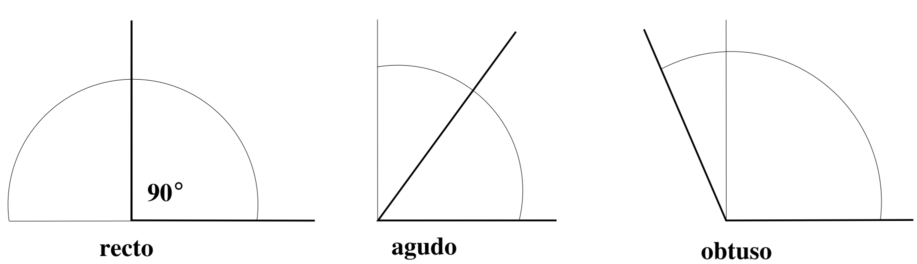

FIGURE 1

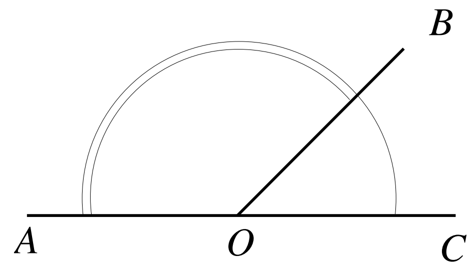

FIGURE 2

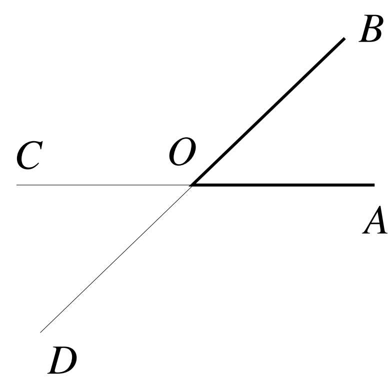

FIGURE 3

ya que ambos contienen el mismo número de grados, a saber, el número que suplementa al número de grados en el ángulo AOB a 180°, los grados que contiene un ángulo llano.

Si AOB es un ángulo recto (Figura 4), i.e., si contiene 90°, entonces cada uno de sus ángulos suplementarios COB y AOD también deben ser rectos, ya que contienen 180°-90°, i.e., 90°. El cuarto ángulo COD también debe de ser recto, ya que los tres ángulos AOB, BOC y AOD contienen entre ellos 270° y, por lo tanto, lo que queda de 360° para el cuarto ángulo COD también es 90°. Luego, *si uno de los cuatro ángulos formados por dos rectas que se intersecan* (AC y BD, Figura 4) *es recto, entonces los otros tres ángulos también deben ser rectos.*

3. Una perpendicular y una inclinada.

En el caso en que dos ángulos suplementarios no son congruentes, su lado común (lado OB, Figura 5) se llama una **inclinada**[1] a la línea (AC) que contiene los otros dos lados. Cuando, sin embargo, los ángulos suplementarios son congruentes (Figura 6) y cuando, por lo tanto, cada uno de los ángulos es recto, el lado común se llama una **perpendicular** a la línea que contiene los otros dos

[1]Otro nombre que se usa es una **línea oblicua**.

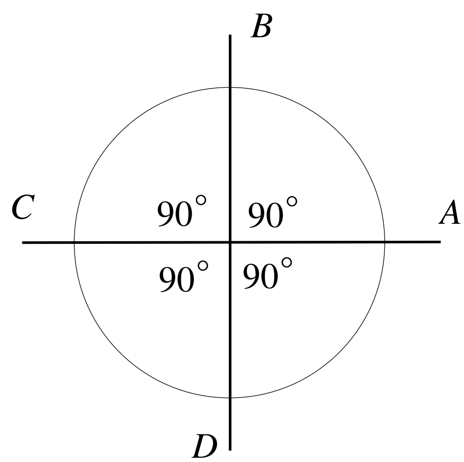

FIGURE 4

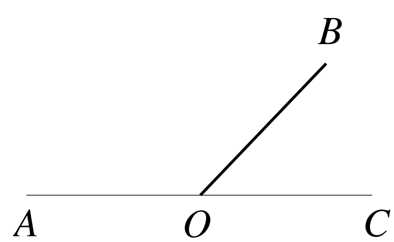

FIGURE 5

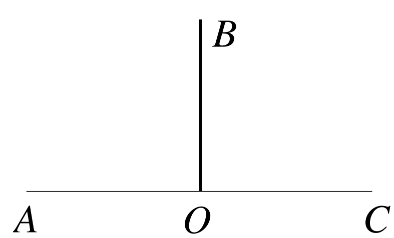

FIGURE 6

lados. El vértice común (O) se llama **el pie de la inclinada** en el primer caso y el **pie de la perpendicular** en el segundo.

Dos rectas (AC y BD, Figura 4) que se intersecan en un ángulo recto se llaman **perpendiculares**. El hecho de que la ínea AC sea perpendicular a la línea BD se escribe: $AC \perp BD$.

Comentarios. (1) Si se debe trazar una perpendicular a una línea AC (Figura 6) a través de un punto O en esta línea, entonces se dice que la perpendicular se "levanta" a la línea AC y, si la perpendicular se debe trazar a través de un punto

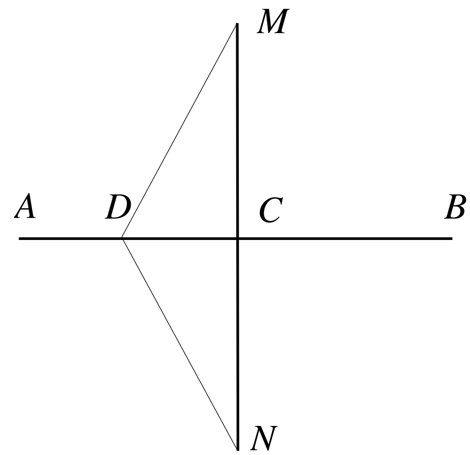

FIGURE 7

B fuera de ella, entonces se dice que la perpendicular se "tira" a la línea (si importar si es para arriba, para abajo o de lado).

(2) Obviamente en cualquier punto de una línea dada y hacia cualquiera de sus lados, se puede levantar una perpendicular y tal perpendicular es única.

4

Probemos que **desde cualquier punto fuera de una recta dada se puede tirar una perpendicular a esta recta y tal perpendicular es única.**

Sean AB una recta y M un punto fuera de la recta dada (Figura 7). Debemos mostrar, primero, que se puede tirar una perpendicular desde este punto a AB y, en segundo lugar, que sólo hay una perpendicular tal.

Imaginemos que el diagrama está doblado de tal manera que la parte de arriba se identifica con la parte de abajo. Entonces el punto M toma alguna posición N. Marquemos esta posición, desdoblemos el diagrama a su forma inicial y conectemos los puntos M y N con una recta. Mostremos ahora que la recta resultante MN es perpendicular a AB y que cualquier otra línea que pasa por M, por ejemplo MD, no es perpendicular a AB. Para esto doblemos el diagrama de nuevo. Entonces el punto M se encima con N otra vez y los puntos C y D se quedan en sus lugares. Por lo tanto la línea MC se identifica con NC y MD con ND. Se sigue que $\angle MCB = \angle BCN$ y $\angle MDC = \angle CDN$.

Pero los ángulos MCB y BCN son suplementarios. Por lo tanto cada uno de ellos es recto y de ahí que $MN \perp AB$. Como MDN no es una línea recta (ya que no puede haber dos rectas que conectan a los puntos M y N), entonces la suma de los dos ángulos congruentes MDC y CDN no es igual a $2d$. Por lo tanto el ángulo MDC no es recto y, por consiguiente, MD no es perpendicular a AB. Luego no se puede tirar otra perpendicular desde el punto M a la recta AB.

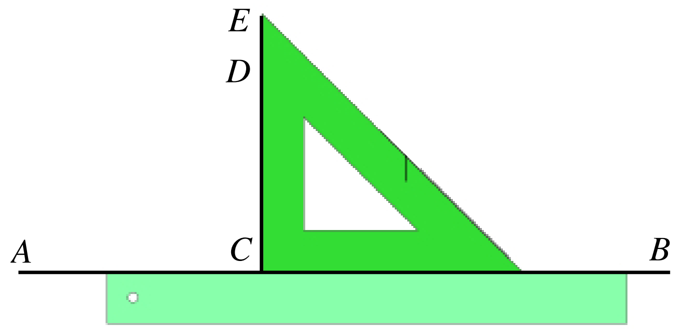

FIGURE 8

5. La escuadra.

Para la contrucción de una perpendicular a una recta dada, en la práctica es conveniente usar una **escuadra** (uno de cuyos ángulos es recto). Para dibujar la perpendicular a la recta AB (Figura 8) a través del punto C en la recta, o a través de un punto D fuera de esta línea, se alínea una regal la recta AB, la escuadra con la regla y se desliza la escuadra a lo largo de la regla hasta que el otro lado del ángulo recto toca al punto C o al D y entonces trazamos la recta CE.

6. Ángulos verticales.

Dos ángulos se llaman **verticales** si los lados de uno de ellos son continuación de los lados del otro. Por ejemplo, en la intersección de dos rectas AB y CD (Figura 9) se forman dos pares de ángulos verticales: AOD y COB, AOC y DOB (y hay cuatro pares de ángulos suplementarios).

Dos ángulos verticales son congruentes (por ejemplo, $\angle AOD = \angle BOC$) ya que cada uno de ellos es suplementario del mismo ángulo (de $\angle DOB$ o de $\angle AOC$) y tales ángulos, como vimos (Apartado 2), son congruentes.

7. Ángulos que tienen un vértice común.

Es útil recordar los sigientes hechos simples acerca de los ángulos que tienen su vértice común:

(1) *Si la suma de varios ángulos* (AOB, BOC, COD, DOE, Figura 10) *que tienen su vértice común es congruente con un ángulo llano, entonces la suma es $2d$, i.e., $180°$.*
(2) *Si la suma de varios ángulos* (AOB, BOC, COD, DOE, EOA, Figura 11) *que tienen su vértice común es congruente con el ángulo completo, entonces la suma es $4d$, i.e., $360°$.*

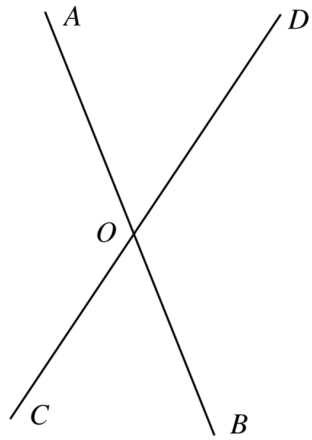

FIGURE 9

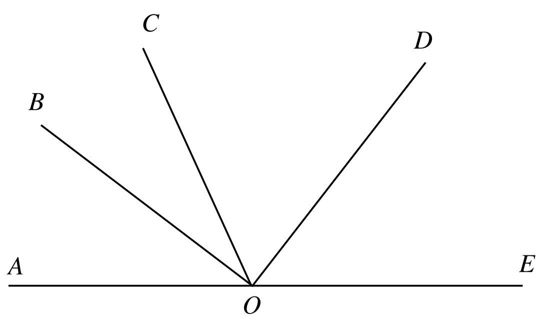

FIGURE 10

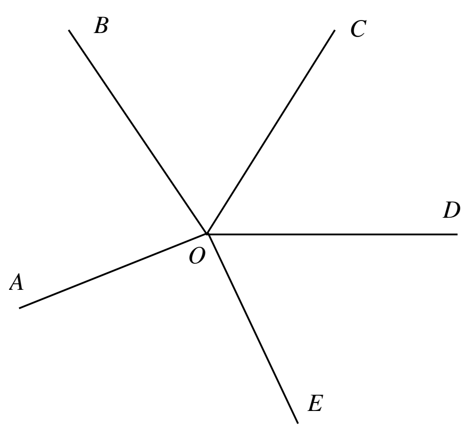

FIGURE 11

(3) *Si dos ángulos* (AOB y BOC, Figura 5) *tienen su vértice común* (O) *y un lado común* (OB) *y suman 2d* (i.e., 180°) *entonces sus otros dos lados*

(AO y OC) *son continuación uno del otro* (i.e., son ángulos suplementarios).

Ejercicios

(1) ¿La suma de los ángulos $14°24'44''$ y $75°35'25''$ es aguda u obtusa?
(2) Cinco rayos trazados desde el mismo punto dividen al ángulo completo en cinco partes congruentes. ¿Cuántos ángulos distintos forman estos cinco rayos? ¿Cuáles de estos ángulos son congruentes? ¿Cuáles de ellos son agudos? ¿obtusos? Encuentra la medida en grados de cada uno de ellos.
(3) ¿Pueden dos ángulos cuya suma es un ángulo llano ser ambos agudos? ¿ambos obtusos?
(4) Encuentra el menor número posible de ángulos agudos que suman un ángulo completo. Lo mismo para ángulos obtusos.
(5) Un ángulo mide $38°20'$. Encuentra la medida de sus ángulos suplementarios.
(6) Uno de los ángulos formado por dos rectas que se intersecan es $2d/5$. Encuentra la medida de los otros tres.
(7) Calcula la medida de un ángulo que es congruente con dos veces su ángulo suplementario.
(8) Dos ángulos ABC y CBD que tienen el vértice común B y el lado común BC están colocados de tal manera que no se cubren el uno al otro. El ángulo $ABC = 100°20'$ y el ángulo $CBD = 79°40'$. ¿Los lados AB y BD forman una línea recta o una línea quebrada?
(9) Dos rayos distintos, perpendiculares a una recta dada se levantan en un punto dado. Encuentra la medida del ángulo entre estos rayos.
(10) En la parte de adentro de un ángulo obtuso dos perpendiculares a sus lados se levantan en su vértice. Calcula la medida del ángulo obtuso, si el ángulo entre las perpendiculares es $4d/5$.

Demuestra:

(11) Las bisectrices de dos ángulos suplementarios son perpendiculares.
(12) Las bisectrices de dos ángulos verticales son continuación una de la otra.
(13) Si en un punto O de la recta AB (Figura 9) se construyen dos ángulos congruentes AOD y BOC en lados opuestos de AB, entonces sus lados OD y OC forman una línea recta.
(14) Si desde un punto O se construyen rayos OA, OB, OC y OD de tal manera que $\angle AOC = \angle DOB$ y $\angle AOD = \angle COB$, entonces OB es continuación de OA y OD es continuación de OC
Sugerencia: Aplica el Apartado 7, enunciados 2 y 3.